第11卷 第4期 2011年2月
1671—1815(2011)4-0798-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol.11 No.4 Feb. 2011
© 2011 Sci.Tech.Engng.

研究简报

数 学

关于Smarandache伪奇数序列与数论函数的两个渐进公式

刘兴茹 郭金保

(延安大学数学与计算机科学学院,延安 716000)

摘 要 对Smarandache伪奇数序列与数论函数的均值进行研究,利用初等的、解析的方法得出两个比较有意义的渐进公式:$\sum_{\substack{n\in X\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^{2}}x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^{2}x\right)$;$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}d^{2}(n)=\frac{6}{\pi^{2}}x\ln^{3}x+Ax\ln^{2}x+Bx\ln x+C\ln x+O\left(x^{\varepsilon+\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)$。

关键词 Smarandache伪奇数序列 数论函数 渐近公式

中图法分类号 O156; 文献标志码 A

近几年许多数论爱好者对美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在1993年所著的《Only Problems, Not Solutions》[1]一书中提出的105个数论尚未解决的问题进行了广泛的研究,书中第75个问题F.Smarandache教授要求对伪奇数序列进行研究。在文献[2]中给出了一个性质。本文通过用解析的方法给出了两个渐进公式,我们首先给出定义。

Smarandache伪奇数序列:1,3,5,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,…,设X表示所有伪奇数的序列。在数列中任意一个正整数,如果将其进行置换包括恒等置换后所得的数字是奇数的数,那么这个数为伪奇数。

定理1 对任意的实数$x\geqslant 1$,我们有渐进公式:

$$\sum_{\substack{n\in X\\ n\leqslant x}}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^{2}}x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^{2}x\right)。$$

其中$\varphi(n)$为欧拉函数。

定理2 设$n\in X$,对任意的$x\geqslant 1$,我们有渐进公式:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}d^{2}(n)=\frac{6}{\pi^{2}}x\ln^{3}x+Ax\ln^{2}x+Bx\ln x+C\ln x+O\left(x^{\varepsilon+\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)。$$

其中$d(n)$表示除数函数;A,B,C表示常数。

1 引理

对任意实数$x\in X$且$x\geqslant 1$,我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}f(n)=\sum_{n\leqslant x}f(n)+O\left(Ax^{\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)。$$

其中$A=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant x}\{|f(x)|\}$。

证明参考文献[2]。

2 定理的证明

利用上述引理,以及用初等的和解析的方法来完成定理1,定理2的证明。

2010年11月8日收到,11月16日修改

第一作者简介:刘兴茹,女,陕西靖边县人,延安大学研究生。

定理 1 的证明：首先我们引用文献[3]中的 $\sum_{n\le x}\varphi(x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\lg x)$，令 $\sum\varphi(x)=A(x)$，$g(x)=\frac{1}{x}$，则

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n)}{n}=A(x)g(x)-\int_1^x A(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+O(1)=$$

$$\left[\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\lg x)\right]\frac{1}{x}-\int_1^x\left[\frac{3}{\pi^2}t^2+O(t\lg t)\right]\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+$$

$$O(1)=\frac{3}{\pi^2}x+O(\lg x)+\frac{3}{\pi^2}x+C+$$

$$O\left(\frac{1}{2}\lg^2 t\right)+O(1)=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{2}\lg^2 x\right)。$$

又因为 $\left|\frac{\varphi(n)}{n}\right|<1$，所以由引理可得：

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in X}}\frac{\varphi(x)}{n}=\frac{6}{\pi^2}x+O\left(\frac{1}{2}\lg^2 x\right)。$$

定理 1证毕。

定理 2的证明：由 Euler乘积公式[4]及 $d(n)$的定义，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n)}{n^s}=\prod_p\left[1+\frac{d^2(p)}{p^s}+\frac{d^2(p^{2})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{d^2(p^{i})}{p^{is}}+\cdots\right]=$$

$$\prod_p\left[1+\frac{1}{p^s}+\frac{2^2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{i^2}{p^{is}}+\cdots\right]=$$

$$\prod_p\left[1+\frac{1+\frac{2p^{-s}}{1-p^{-s}}}{(1-p^{-s})^2}\right]=$$

$$\frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^3}=\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}。$$

其中 $\zeta(s)$为黎曼-zeta函数，$\prod_p$ 表示对所有的素数求积，结合上式及 porron公式[5]。设 $s_0=0$，$b=2+\varepsilon$，$T=x^{\frac{3}{2}}$，则

$$\sum_{n\le x}d^2(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{2+\varepsilon}}{T}\right)\quad(1)$$

平移(1)式的积分式至 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}+iT$，此时 $G(s)=\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}$在 $s=1$处有 4阶级点且留数，

$$\mathrm{Res}_{s=1}G(s)=\frac{6}{\pi^2}x\ln^3 x+Ax\ln^2 x+Bx\ln x+C\ln x。$$

则

$$\sum d^2(n)=\mathrm{Res}_{s=1}G(s)+\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{2+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}+\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{2+\varepsilon+iT}\right]\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds。$$

当$\frac{1}{2}\le\sigma<1$时 $\zeta(s)\ll t^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}$，可得估计式

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{2+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{2+\varepsilon+iT}\right]\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}，$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}\right]\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds\ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}。$$

所以

$$\sum_{n\le x}d^2(n)=\frac{6}{\pi^2}x\ln^3 x+Ax\ln^2 x+Bx\ln x+C\ln x+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)。$$

由 $d^2(n)\ll n^{\varepsilon}$，且$\frac{\ln 5}{\ln 10}>\frac{1}{2}$，则由引理得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in X}}d^2(n)=\frac{6}{\pi^2}x\ln^3 x+Ax\ln^2 x+Bx\ln x+C\ln x+O\left(x^{\varepsilon+\frac{\ln 5}{\ln 10}}\right)。$$

定理 2证明完毕。

参　考　文　献

1　Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publ House, 1993

2　Chen Guohui. New Progress On Smarandache Problems. Xi'an: High American Press, 2007

3　Apstol T M. Introduction to analytic number theory. New York: Springer-Verlay, 1976

4　潘承洞, 潘承彪. 初等数论. 北京: 北京大学出版社, 1997

5　潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1991

(下转第 0803页)

3 林远华, 冯春华. 一类中立型积分微分方程概周期解的存在性和唯一性. 河池学院学报, 2008, 28(5): 21－25

4 何崇祐. 概周期微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1992

5 FINK A M. Almost Periodic Differential Equation. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Sprin-Verlag, 1974

6 黄启昌, 具无限时滞的泛函数分方程的周期解得存在性. 中国科学, 1984, 14A(10): 882－889

Class of Integral Differential Equation Periodic Solutions of Existence

QIAN Xue-sen, WANG Liang-long

(Anhui University Mathematics Science College of Anhui, Hefei 230039, P. R. China)

[Abstract] A class of neutral integro-differential equation of almost periodic solutions for the existence and uniqueness of the problem is considered. Using matrix measure and the fixed point of the methods, periodic solution, and the promotion of the existence and uniqueness of the main results of related literatures are obtained almost.

[Keywords] integral differential equation almost periodic solution the matrix measure fixed point

---

(上接第 0799页)

On Two Asymptotic Formulas About Smarandache Psrudo-odd Sequence and Number Theory Funtions

LIU Xing-ru, GUO Jin-bao

(College of Mathematical and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, P. R. China)

[Abstract] This section mainly stadys the mean value of Smarandache psrudo-odd sequence by using the elementary and analytic methods. Two interesting asymptotic formulas are obtained: (1) $\sum_{\substack{n\in X\\ n\leqslant x}} \frac{\varphi(x)}{n} = \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\frac{1}{2}\lg^2 x\right)$;

(2) $\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}} d^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x\ln^3 x + Ax\ln^2 x + Bx\ln x + C\ln x + O\left(x^{\varepsilon+\frac{\ln 3}{\ln 10}}\right)$.

[Keywords] Smarandache pseudo-odd sequanc munber theory function asymptotic formulas